**Théorème 0.1** (Inégalité de Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \zeta^2 |\hat{f}(\zeta)|^2 \, \mathrm{d}\zeta \geq \frac{1}{4} \|f\|_{L^2}^4$$

# 1 Etape 1 : Cas de Schwarz

On commence par prouver l'inégalité dans le cas de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ou bien $C_c^\infty(\mathbb{R})$, cela revient au même). Dans ce cas là, on a que $\mathcal{F}(f') = -i\zeta \hat{f}$. On oublie éventuellement une constante dû a la normalisation de la transformée de Fourier. On utilise alors le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \zeta^2 |\hat{f}(\zeta)|^2 \, \mathrm{d}\zeta = \|xf\|_{L^2}^2 \|\zeta \hat{f}\|_{L^2}^2 = \|xf\|_{L^2}^2 \|f'\|_{L^2}^2 \\ \geq \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) \, \mathrm{d}x\right)^2 \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

Faisons alors le calcul de ce dernier terme, par un intégration par partie, comme les termes de bord sont nuls (car les fonctions sont dans l'espace de Schwarz) on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) \, \mathrm{d}x &= 0 - \int_{\mathbb{R}} (f(x) + x f'(x)) f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\|f\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

D'où $\int_{\mathbb{R}} x f(x) f'(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2$ et le résultat.

# 2 Etape 2 : La densité

On va prolonger ce résultat par densité, le but est de montrer le résultat dans

$$H_1^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid xf \in L^2(\mathbb{R}) \;\; \zeta \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\} \qquad \text{(Espace de Sophie-Carmen)}$$

En effet, si $f \in L^2$ mais n'est pas dans $H_1^1$, alors l'inégalité est trivialement vrai. Les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R})$ sont bien inclus dans cette espace, il suffit alors de trouver une suite de fonction $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge vers $f \in H_1^1$ pour la norme : $\|f\|_1 = \|f\|_{L^2} + \|xf\|_{L^2} + \|\zeta \hat{f}\|_{L^2}$. On va construire cette suite de fonction par troncature puis convolution. Commençons par montre que si $f \in H_1^1$, alors $f$ s'approche par des fonctions à support compact (pas forcément régulière).

## 2.1 La troncature

On considère une fonction plateau de la forme suivante : $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

1. $0 \leq \chi \leq 1$
2. $\chi = 0$ hors de [-2,2]
3. $\chi = 1$ sur [-1,1]
4. $\int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta = 1$

On pose alors pour $n > 1$, $\chi_n : x \mapsto \chi(\frac{x}{n})$ et $f_n = f\chi_n$ qui est à support compact. On a que $\chi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} 1$, $\chi_n \leq 1$ et $f \in L^2$, $xf \in L^2$, alors par théorème de convergence dominée on a que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$ et $xf_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} xf$.

On s'occupe ensuite de $\zeta \hat{f_n}$, on va utiliser le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Si $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est tel que $\int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = 1$ et $\chi_n = \chi(\frac{\cdot}{n})$ alors $\hat{\chi_n}$ est une approximation de l'unité, en particulier pour tout $f \in L^p$, $f * \hat{\chi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$*

Pour prouver ce lemme, il suffit de voir que $\hat{\chi_n}(x) = n\hat{\chi}(nx)$, que $\hat{\chi}$ est dans $L^p$ (ce qui est vrai car $\chi$ est dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$, donc $\hat{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) et que $\int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = 1$, par hypothèse.

Soit $\zeta \in \mathbb{R}$, on a par propriété de la transformée de Fourier, $\hat{f_n} = \hat{f} * \hat{\chi_n}$

$$\begin{aligned}\zeta\hat{f_n}(\zeta) &= \zeta\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta - x)\hat{\chi_n}(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}}(\zeta - x)\hat{f}(\zeta - x)\hat{\chi_n}(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} x\hat{f}(\zeta - x)\hat{\chi_n}(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

On a une somme de deux termes. Le premier à gauche, est égal à $\zeta\hat{f} * \hat{\chi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \zeta\hat{f}$ d'après le lemme, car $\zeta\hat{f} \in L^2$. Pour le deuxième terme, on montre qu'il tend vers 0 quand $n$ augmente, en effet on a que $\|x\hat{\chi_n}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}}|nx\hat{\chi}(nx)|^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\|x\hat{\chi}\|_{L^2}^2$, et $\|x\hat{\chi}\|_{L^2}^2 < +\infty$ car $x\hat{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi $\|x\hat{\chi_n}\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} 0$ D'où pour le deuxième terme :

$$|\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta - x)x\hat{\chi_n}(x)\ \mathrm{d}x| \leq \|\hat{f}\|_{L^2}\|x\hat{\chi_n}\|_{L^2}$$

Et on a donc que $\zeta\hat{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \zeta\hat{f}$. On a donc approché $f$ par $f_n$ dans $H_1^1$, qui est à support compact. Il reste à montrer que n'importe quel fonction de $H_1^1$ à support compact dans $H_1^1$ s'approche par une fonction $C_c^\infty(\mathbb{R})$, c'est l'étape de régularisation.

## 2.2 La régularisation

Soit $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ qu'on peut supposer à support compact. On cherche donc une suite de fonction $f_n$ régulière et à support compact, qui l'approche toujours pour la norme de $H_1^1$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1$. On pose $\varphi_n : x \mapsto n\varphi(nx)$. Alors $\varphi_n$ est une approximation de l'unité. On pose enfin $f_n = f * \varphi_n$, qui est dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$. On a immédiatement que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$.

Comme $f$ et $\varphi_n$ sont à support compact, et que pour $n > 1$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset \mathrm{Supp}(\varphi)$, on a que pour tout $n > 1$, $f_n$ est à support compact indépendant de $n > 1$. On peut donc trouver $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f_n) \subset [-R, R]$ et $\mathrm{Supp}(f) \subset [-R, R]$.

Alors pour $|x| < R$, on a que

$$\int_{[-R,R]}|xf_n(x) - xf(x)|^2\ \mathrm{d}x \leq R^2\int_{\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|^2\ \mathrm{d}x = R^2\|f_n - f\|_{L^2}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Si $|x| > R$, alors $xf(x) = xf_n(x)$. On a donc $xf_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} xf$.

Enfin, pour la dernière convergence, on note que $\hat{f_n} = \hat{f}\hat{\varphi_n}$ et que pour $x \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi_n}(x) = \hat{\varphi}(\frac{x}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \hat{\varphi(0)} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1$, car $\hat{\varphi}$ continue car dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}}|\zeta\hat{f_n}(\zeta) - \zeta\hat{f}(\zeta)|^2\ \mathrm{d}\zeta = \int_{\mathbb{R}}|\zeta\hat{f}(\zeta)|^2|\hat{\varphi_n}(\zeta) - 1|^2\ \mathrm{d}\zeta$$

Or $|\hat{\varphi_n}(\zeta) - 1| \leq 1 + \|\varphi\|_{L^1} = 2$ et $|\hat{\varphi_n}(\zeta) - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse. Comme $\zeta\hat{f}(\zeta) \in L^2$, d'après le théorème de convergence dominée, on a $\zeta\hat{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \zeta\hat{f}$, d'où le résultat.

# 3 Remarque

1. Le théorème et sa preuve marche pour des fonctions a valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en utilisant le produit hermitien dans le cas des complexes.
2. Les définitions d'approximation de l'unité peuvent varié, en particulier une approximation de l'unité n'a pas nécessairement à être positive, la seul chose qu'on demande réellement c'est de vérifier que $f * \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$ si $f \in L^2$
3. On utilise sans le mentionner, mais pratiquement partout que si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
4. Le cas d'égalité de l'inégalité d'Heisenberg peut se faire pour des fonctions régulières, cela revient à demander le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz, ce qui donne que $f' = \lambda x f$ d'où $f = C\,\mathrm{e}^{\lambda \frac{x^2}{2}}$ qui n'est dans $L^2$ que lorsque $\lambda < 0$. Le cas d'égalité est donc quand $f$ est gaussienne. Par exemple, $f : x \mapsto 32!\,\mathrm{e}^{-x^2}$
5. Il y a beaucoup de recasage possible, mais dans une majorité des cas, il faut prévoir une partie spécifiquement sur la transformée de Fourier, les fonctions dans Schwarz, à support compact, et la convolution.
6. Une fonction plateau n'est pas facile à construire, l'idée est de prendre une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, de poser $\varphi_n : x \mapsto n\varphi(nx)$, et de la convoler avec l'indicatrice d'un certain intervalle.
7. L'espace $H_1^1$ porte se nom pour rappeler l'espace de Sobolev dans $L^2$, la différence étant que $H_1^1$ est stable par transformation de Fourier. Toute la preuve possède enfaite des espaces de Sobolev caché dedans, notamment sur le fait que $x\chi$ correspond en fourier à la dérivée faible (à $-i$ près) de $\chi$.

Leçon possible :

1. 209 approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.
2. 241 Suite et série de fonctions. Exemples et applications.
3. 250 Transformation de Fourier. Applications.
4. 265 Exemples d'études et d'applications de fonction usuelles et spéciales
5. 201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.
6. 234 Fonctions et espace de fonctions Lebesgue-intégrables